

Sferyczne układy współrzędnych — doświadczenie

Kacper Gajda

Astroclass

1 Wprowadzenie

W celu lepszego zrozumienia zasad działania sferycznych układów współrzędnych można wykonać poniższe doświadczenie. Zadaniem ucznia jest zbadanie współrzędnych horyzontalnych Słońca za pomocą gnomonu i kompasu.

Konstrukcja gnomonu nie powinna sprawiać najmniejszych problemów, ponieważ jest to po prostu kij wbity w ziemię. Wysokość horyzontalna Słońca zostanie zmierzona dzięki cieniowi rzucanemu przez gnomon i kilku wzorom matematycznym, a azymut – za pomocą kompasu.

2 Przyrządy:

- prosty kijek o prostokątnej podstawie i znanej długości – najlepiej 30cm-40cm
- linijka, metrówka, bądź inny przyrząd do pomiaru długości
- kalkulator z funkcją arcus tangens lub tablice funkcji trygonometrycznych
- kompas z kątomierzem na tarczy
- ekierka

3 Przebieg Doświadczenia

3.1 Konstruowanie Gnomonu

Gnomon to jeden z najprostszych i najstarszych przyrządów astronomicznych. Aby go zbudować, wystarczy postawić prosty kij prostopadle do ziemi. Gnomon należy umieścić w dobrze oświetlonym miejscu, wolnym od cieni i półcieni, np. na boisku. Po postawieniu, korzystając z ekierki, należy upewnić się, że gnomon stoi prosto i prostopadle do powierzchni.

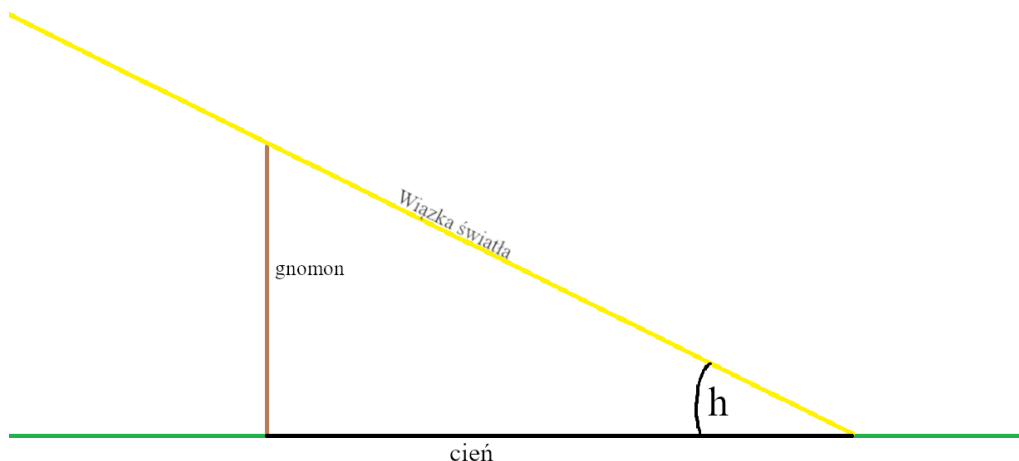
Doświadczenie nie uda się w pochmurny dzień światło słoneczne musi padać na gnomon bezpośrednio.

3.2 Pomiary

To doświadczenie można przeprowadzić na trzy sposoby:

- jednorazowy pomiar wysokości i azymutu
- kilkukrotne pomiary na przestrzeni kilku godzin (obserwacja ruchu obrotowego Ziemi)
- kilkukrotne pomiary na przestrzeni kilku tygodni (obserwacja ruchu obiegowego Ziemi)

Należy zauważyć, że gnomon rzuca cień o określonej długości. Jak wiadomo, cienie tych samych obiektów nie zawsze mają tę samą długość. Długość cienia zależy od tego, pod jakim kątem pada na ciało światło. Rysunek pomocniczy:



Rysunek 1: Gnomon

Należy zauważyć, że cień „leżący” na ziemi, jest w tej samej płaszczyźnie, co horyzont. Zatem kąt pomiędzy promieniem światła słonecznego a cieniem jest wysokością horyzontalną Słońca (h).

Należy zauważyć także, że cień, gnomon i światło tworzą trójkąt prostokątny. Do obliczenia wysokości Słońca użyjemy wzorów z trygonometrii płaskiej, które zostały podane w dalszej części tego dokumentu.

Do określenia h Słońca należy wykonać następujące pomiary:

- Zmierzyć długość gnomonu
- Zmierzyć długość cienia

Do określenia A (azymutu) Słońca wystarczy sam kompas. Dla lepszej przejrzystości polecenia napisane zostały na podstawie poniższego zdjęcia.



Należy trzymać kompas równolegle do ziemi i zauważyć, że jest wyposażony w podziałkę z nieruchomą różą wiatrów. Nieruchome N należy skierować tak, żeby wskazywało geograficzne południe – czyli tak, żeby zielona część igły znajdowała się nad literą S. Następnie należy obrócić się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, aż N (na podziałce) kompasu wskaże Słońce. Następnie należy odczytać kąt, jaki zakresliła wskazówka podczas naszego obrotu.

3.2.1 Pomiary zapisujemy w tabeli:

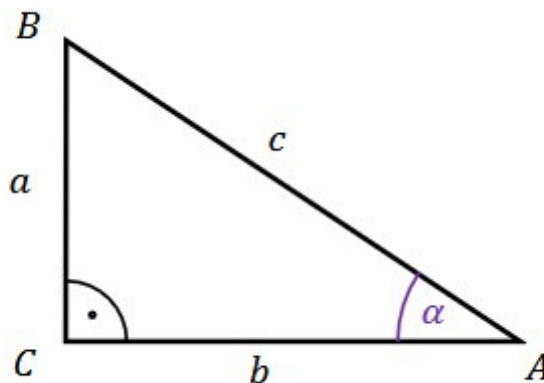
Data	Długość Cienia (cm)	Azymut (deg)

Tabela 1: Pomiary

* Deg oznacza stopnie (z ang. „degree”)

3.3 Obliczanie wysokości

Aby obliczyć wysokość, musimy użyć funkcji trygonometrycznych. Żeby z nich skorzystać, wystarczy wiedzieć, że jeżeli trójkąt ma kąty: 90° , α , β to jego boki ZAWSZE będą w danym stosunku do siebie. Znanym, na tym etapie edukacji, powinien być trójkąt 30° , 60° , 90° . Boki tego trójkąta pozostają w stosunkach: a , $\frac{a}{2}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ – trygonometria jest bardzo podobna.



Rysunek 2:
Rysunek pomocniczy

Do obliczenia wysokości skorzystamy z funkcji tangens (tg). Jest to stosunek boku a (rysunek wyżej) do boku b:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b}$$

α w nawiasie oznacza, że liczymy tangens dla kąta alfa. W naszym doświadczeniu będziemy liczyć tangens kąta h, czyli $\operatorname{tg}(h)$. Zatem wzór na tangens wysokości Słońca:

$$\operatorname{tg}(h) = \frac{\text{długość gnomonu}}{\text{długość cienia}}$$

Poniżej omówione zostały dwa sposoby wyznaczenia h, wraz z przykładami, które mają ułatwić obliczenia.

3.3.1 Tablice trygonometryczne

Do znalezienia wartości tangensa posłużymy się poniższą tablicą:

α [°]	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0	0.0000	1.0000	0.0000
1	0.0175	0.9998	0.0175
2	0.0349	0.9994	0.0349
3	0.0523	0.9986	0.0524
4	0.0698	0.9976	0.0699
5	0.0872	0.9962	0.0875
6	0.1045	0.9945	0.1051
7	0.1219	0.9925	0.1228
8	0.1392	0.9903	0.1405
9	0.1564	0.9877	0.1584
10	0.1736	0.9848	0.1763
11	0.1908	0.9816	0.1944
12	0.2079	0.9781	0.2126
13	0.2250	0.9744	0.2309
14	0.2419	0.9703	0.2493
15	0.2588	0.9659	0.2679
16	0.2756	0.9613	0.2867
17	0.2924	0.9563	0.3057
18	0.3090	0.9511	0.3249
19	0.3256	0.9455	0.3443
20	0.3420	0.9397	0.3640
21	0.3584	0.9336	0.3839
22	0.3746	0.9272	0.4040
23	0.3907	0.9205	0.4245
24	0.4067	0.9135	0.4452
25	0.4226	0.9063	0.4663
26	0.4384	0.8988	0.4877
27	0.4540	0.8910	0.5095
28	0.4695	0.8829	0.5317
29	0.4848	0.8746	0.5543
30	0.5000	0.8660	0.5774
31	0.5150	0.8572	0.6009
32	0.5299	0.8480	0.6249
33	0.5446	0.8387	0.6494
34	0.5592	0.8290	0.6745
35	0.5736	0.8192	0.7002
36	0.5878	0.8090	0.7265
37	0.6018	0.7986	0.7536
38	0.6157	0.7880	0.7813
39	0.6293	0.7771	0.8098
40	0.6428	0.7660	0.8391
41	0.6561	0.7547	0.8693
42	0.6691	0.7431	0.9004
43	0.6820	0.7314	0.9325
44	0.6947	0.7193	0.9657
45	0.7071	0.7071	1.0000

α [°]	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
45	0.7071	0.7071	1.0000
46	0.7193	0.6947	1.0355
47	0.7314	0.6820	1.0724
48	0.7431	0.6691	1.1106
49	0.7547	0.6561	1.1504
50	0.7660	0.6428	1.1918
51	0.7771	0.6293	1.2349
52	0.7880	0.6157	1.2799
53	0.7986	0.6018	1.3270
54	0.8090	0.5878	1.3764
55	0.8192	0.5736	1.4281
56	0.8290	0.5592	1.4826
57	0.8387	0.5446	1.5399
58	0.8480	0.5299	1.6003
59	0.8572	0.5150	1.6643
60	0.8660	0.5000	1.7321
61	0.8746	0.4848	1.8040
62	0.8829	0.4695	1.8807
63	0.8910	0.4540	1.9626
64	0.8988	0.4384	2.0503
65	0.9063	0.4226	2.1445
66	0.9135	0.4067	2.2460
67	0.9205	0.3907	2.3559
68	0.9272	0.3746	2.4751
69	0.9336	0.3584	2.6051
70	0.9397	0.3420	2.7475
71	0.9455	0.3256	2.9042
72	0.9511	0.3090	3.0777
73	0.9563	0.2924	3.2709
74	0.9613	0.2756	3.4874
75	0.9659	0.2588	3.7321
76	0.9703	0.2419	4.0108
77	0.9744	0.2250	4.3315
78	0.9781	0.2079	4.7046
79	0.9816	0.1908	5.1446
80	0.9848	0.1736	5.6713
81	0.9877	0.1564	6.3138
82	0.9903	0.1392	7.1154
83	0.9925	0.1219	8.1443
84	0.9945	0.1045	9.5144
85	0.9962	0.0872	11.4301
86	0.9976	0.0698	14.3007
87	0.9986	0.0523	19.0811
88	0.9994	0.0349	28.6363
89	0.9998	0.0175	57.2900
90	1.0000	0.0000	–

źródło: Wybrane wzory matematyczne CKE

Rysunek 3: Tablica wartości funkcji trygonometrycznych

Zasada postępowania jest następująca:

- korzystamy z funkcji tangens:

$$\operatorname{tg}(h) = \frac{\text{długość gnomonu}}{\text{długość cienia}}$$

- wyliczoną wartość $\operatorname{tg}(h)$ sprawdzamy w tabeli powyżej.

Przykład:

niech $x = 20\text{cm}$ będzie wysokością gnomonu, a $y = 25\text{cm}$ długością cienia:

$$\operatorname{tg}(h) = \frac{x}{y}$$

$$\operatorname{tg}(h) = \frac{20}{25}$$

$$\frac{20}{25} = 0,8$$

Sprawdzamy wynik 0,8 w tabeli, w kolumnie $\operatorname{tg}\alpha$. Jak widać, nie ma wartości równej dokładnie 0,8, szukamy zatem wartości jej najbliższych. Są to 0,7813 i 0,8098. Wybieramy wynik bliższy naszej wartości, czyli 0,8098, a następnie odczytujemy kąt α z pierwszej kolumny. Jest to 39 stopni.

3.3.2 Sposób drugi (bardziej zaawansowany): Arcus tangens

Do obliczenia wysokości użyjemy funkcji tangens i arcus tangens. Funkcja arcus tangens pozwala wyznaczyć kąt, którego tangens obliczyliśmy. Jeżeli nie posiadasz kalkulatora z funkcją arcus tg (na niektórych kalkulatorach zapisywana tg^{-1} lub $\tan^{-1}$), możesz skorzystać z kalkulatorów internetowych.

Zatem:

$$h = \operatorname{arctg}\left(\frac{\text{długość gnomonu}}{\text{długość cienia}}\right)$$

Przykład:

niech $x = 20\text{cm}$ będzie wysokością gnomonu, a $y = 25\text{cm}$ długością cienia, wtedy:

$$h = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$h = \operatorname{arctg}\left(\frac{20}{25}\right)$$

$$h = 38,7^\circ$$

4 Wyniki

Do porównania wyników w różnych momentach może być pomocna tabela:

Data	wysokość h (deg)	Azymut A (deg)

Tabela 2: Wyniki